

Fortløbende kommentar

Jens Mammen

Psykologisk Institut, Aarhus Universitet

Udvalgskategorier, intentionalitet og matematik

1. Indledning.

I *Bulletin fra Forum for Antropologisk Psykologi*, nr. 4¹ er der en række indlæg, som på forskellig måde forholder sig til mine begreber om sanse- og udvalgskategorier, specielt som de optræder i mine kommentarer (Mammen, 1998b) til Erik Schultz i samme nummer. Det lå imidlertid i det aftalte format for nummeret, at jeg ikke i første omgang kunne svare på andre indlæg end Erik Schultz' targetartikel (Schultz, 1998a). Det har jeg så til gengæld fået lov til i nærværende nummer. Jeg har læst alle de nævnte indlæg, fra Preben Bertelsen, Niels Engelsted, Jan Tønnes Hansen, Simo Køppe og Asger Neumann, samt også Erik Schultz' replik, med interesse og stort udbytte.

Af pladsgrunde har jeg i denne omgang tilladt mig at være meget selektiv i mine kommentarer. Jeg har udvalgt nogle sammenhængende temaer, som jeg stort set holder mig til. Det betyder ikke, at jeg opfatter dem som væsentligere end de temaer, som jeg har måttet lade ligge. Men jeg har valgt at holde mig til den emnekrede, der optager mig mest i øjeblikket, og som jeg også er i gang med i anden sammenhæng.

Jeg tillader mig også at forudsætte, at læseren har debatten i Nr. 4 nogenlunde præsent, herunder mit eget indlæg.

Kort fortalt er hovedtemaet et "gab", der synes at være mellem på den ene side min anvendelse af begreberne sanse- og udvalgskategorier som *indholdsmæssig* beskrivelse af ganske bestemte forhold i det nutidige menneskes psykologi og på den anden side en matematisk beskrivelse af sanse- og udvalgskategoriernes *formelle* egenskaber, som jeg har udfoldet i *Den menneskelige sans* i kapitlet "En infinit logik", med tilføjelser (Mammen, 1983, pp. 299-495, 519-522, i-xiii)². "Gabet" består ikke i, at de to beskrivelser, den indholdsmæssige eller semantiske, og den formelle eller matematiske, ikke

passer sammen. Det er der i hvert fald ingen af kommentatorerne, der har hævdet. Det består derimod i, at den formelle beskrivelse ser ud til at passe på meget mere end lige netop det, som jeg har villet pege på psykologisk, indholdsmæssigt.

Dette giver anledning til to slags kommentarer. Den ene slags, repræsenteret ved Køppe, mener at den formelle beskrivelse derved bliver for *uspecifik* i forhold til indholdet. Den anden slags, repræsenteret ved Bertelsen og Engelsted, mener at den formelle beskrivelse indfører nogle "dimensioner" i den psykologiske beskrivelse, som inviterer til en *generalisation* ud over denne beskrivelse. De har hver deres forslag til en sådan generalisation.

Min kommentar til Køppe tager udgangspunkt i, at "gabet" er uundgåeligt, idet det er en nødvendig egenskab ved enhver formalisering af den aksiomatiske type, som jeg benytter. Men derudover forsøger jeg også at begrunde, hvorfor jeg overhovedet har benyttet en formel, matematisk beskrivelse.

Mine kommentarer til Bertelsen og Engelsted består stort set i at give dem ret. Faktisk er der et lag i den matematiske beskrivelse, som måske ikke er så formelt endda, men derimod genspejler dybe træk ved vores mellemværende med den materielle verden. Disse træk ser ud til netop at have at gøre med det ikke-regelbundne eller "nonalgoritmiske", som Bertelsen fremhæver, og med det moment af frihed og intentionalitet i alle dyrs virksomhed, som Engelsted fremhæver.

Imidlertid vil jeg opretholde en skelnen mellem min oprindelige *specifikke* tolkning af sanse- og udvalgskategoriernes indhold og en mere *generaliseret* tolkning i Bertelsens og/eller Engelsteds retning. Jeg mener nemlig, at den specifikke tolkning skal bevares inden for en eventuel generaliseret tolknings ramme, og jeg mener, at det også kan gøres præcist, selv om jeg kun kommer med et par antydninger lidt senere.

Jeg er nødt til at trække lidt af den matematik frem i lyset, som alligevel ligger som en implicit grund for kommentarerne. Jeg håber, at læseren finder sig i det og måske endda får udviklet sit syn på, hvad matematik er og kan handle om.

Til sidst har jeg nogle kortfattede replikker til Hansen, Neumann og Schultz, som jeg håber at kunne uddybe ved en senere lejlighed.

2. Kommentarer til Køppe.

¹ Findes også i elektronisk udgave som Journal of Anthropological Psychology No 4

² Begreberne sanse- og udvalgskategorier bliver indført i det nævnte kapitel som elementer i en formel beskrivelse. I de senere udgaver (Mammen, 1989; 1996) er der yderligere tilføjet nogle sider (henhv. pp. xiv-xxii og p. xxiii). Desuden er det matematiske grundlag for sanse- og udvalgskategoriernes behandlet i et elektronisk kollokvium (Mammen, 1994-1997; Engelsted, 1998a), som bl.a. Køppe, Bertelsen, Engelsted og Schultz har deltaget i, og som der direkte eller indirekte også hentydes til i kommentarerne. Det kan godt være lidt forvirrende for læserne. Jeg vil prøve at råde bod på det i nærværende artikel.

Simo Køppes indlæg (Køppe, 1998) er det umiddelbart mest kritiske. Køppes væsentligste pointe er for mig at se, at den formelle, aksiomatiske beskrivelse af sanse- og udvalgs-kategorierne i sig selv er semantisk tom og derfor må fyldes ud med særskilte indholdsbestemmelser. Det er vi helt enige om. Det gælder for ethvert aksiomatisk system, og jeg har understreget det samme flere steder, bl.a. i Mammen (1983, pp. 379-380; 1994-1997; 1998b, p. 48).

I og med, at ethvert aksiomatisk system er semantisk tomt, er det også semantisk åbent, dvs. at det kan fyldes ud af uendeligt mange semantikker. Men dette må ikke læses som, at det er åbent for en hvilken som helst semantik. Det udelukker også uendeligt mange semantikker og er altså langt fra semantisk neutralt. At en given aksiomatik og en given semantik passer sammen, kan være et særdeles stærkt udsagn, hvilket jeg synes, at Køppe ignorerer, når han hævder, at aksiomatikken på grund af sin åbenhed ikke kan gøre en forskel for psykologien.

Derudover kritiserer Køppe mig for en upræcis og metaforisk indholdsbestemmelse af begreberne sanse- og udvalgs-kategori. Min oprindelige indholdsbestemmelse af begreberne i Mammen (1983) er imidlertid temmelig præcis og ikke-metaforisk. Det er rigtigt, som Køppe skriver, at jeg i senere skrifter har tilføjet mere metaforiske beskrivelser, men det anser jeg for formidlingsmæssigt velbegrundet. Endelig har jeg nu også tilføjet mange ikke-metaforiske beskrivelser, f.eks. i Mammen (1997). Men se også henvisningerne i Mammen (1998b).

Køppe kritiserer mig desuden for at underbestemme det kategoriserende subjekt. Her tror jeg, at han har overset, at min *formelle* beskrivelse i første omgang handler om den tinglige verdens *økologi* forstået som den måde, hvorpå den tinglige verden er potentielt tilgængelig for et optimalt skel-nende og kategoriserende menneske. I denne første, økologiske, beskrivelse optræder *subjektet* blot som alment udgangspunkt for, hvilke forhold eller dimensioner der overhovedet er *relevante* i beskrivelsen. Inden for denne ramme må det enkelte konkrete subjekts kategoriseringer så i anden omgang beskrives, på samme måde som J. J. Gibson (1966) beskriver subjektets faktiske opsamling af information inden for rammerne af den potentielle information (se f.eks. Mammen, 1983, pp. 61-70, 304-307, 333-336, 342-343, 433, 486-487).

Jeg har eksplicit begrænset mig til den makroskopiske og klassiske tingsverden (Mammen, 1983, pp. 342, 454), så Køppes henvisninger til resten af "universet" er skudt lidt forbi.

Køppe har imidlertid ret i, at indholdsbestemmelsen af begreberne sanse- og udvalgs-kategori kan vanskeliggøres af, at jeg på det seneste (Mammen, 1998a), tilskyndet af Niels Engelsted (1998a), har undersøgt muligheden af at generalisere begreberne til dyrs økologi for derefter igen at bestemme det specifikt menneskelige på denne nye baggrund. I en sådan mulig teoretisk transitionsfase kan subjektet forekomme at være underbestemt i forhold til de rammer, som angives i den økologiske beskrivelse, selv om det er meningen at opretholde den specifikke indholdsbestemmelse helt intakt. Jeg skulle muligvis have ventet med at annoncere dette projekt, til jeg havde færdiggjort det. Men det er fristende at invitere andre til

at tænke med. Endelig kan jeg jo heller ikke tage patent på begreberne, hvis de faktisk fanger noget i virkeligheden.

Når alt dette er sagt, må jeg dog understrege, at en helt central pointe i Mammen (1983) er at argumentere for en *subjektiv* forudsætning for menneskets virksomhed, nemlig en særlig *sans for det konkrete*, som er en nødvendig, men hidtil overset betingelse for Marx' og Leontjevs påstand om en særlig *menneskelig sans*, dvs. en sans for tingenes "menneskelige historie", hvilket igen, i min udlægning, vil sige den enkelte numerisk identiske tings historie i en menneskelig kontekst.

Marx og Leontjev har i deres principielle afvisning af en menneskelig "essens" overset en artsspecifik subjektiv forudsætning for menneskets særlige samfundsmæssighed, nemlig en sans for det konkrete, som viser sig tidligt i ontogenesen³. En påvisning af denne forudsætning kan efter min mening hjælpe til at bygge bro mellem kognitionspsykologien og social- og personlighedspsykologien.

Det var imidlertid vigtigt for mig at påpege, at der virkelig var tale om en *sans*, som var grundlag for en kategorisering af verden, der modsvarede *objektive* klasser, som ikke kunne være objekt for virksomheden uden sansen for det konkrete. At sådanne klasser faktisk *eksisterer* og *ikke kan reduceres* til klasser defineret ud fra sensorisk skelnen, måtte derfor påvises! *Indførelsen af sanse- og udvalgs-kategorierne og dermed den formelle beskrivelse tjente først og fremmest dette formål!* Jeg var så at sige nødt til at vise, at den *subjektive* sans faktisk svarede til en *ureducerbar* forskel i *økologien!*

Centralt var det også at påvise, at den nye "infinite logik", som derved blev etableret, dels var en global struktur i verden, dels korresponderede med klassisk finit logik eller det såkaldte "velafgrænsede tilfælde" (Mammen, 1983, pp. 369-374, 419-420, 438, 487).

Alt dette nødvendiggjorde en formel og matematisk beskrivelse. Derudover tjener en sådan beskrivelse til, at en lang række implikationer kan afledes af få centrale påstande. Her må jeg nøjes med at henvise til Mammen (1983).

3. Kommentarer til Engelsted og Bertelsen.

Som Niels Engelsted korrekt påpeger i sin kommentar (Engelsted, 1998b), har jeg semantisk og indholdsmæssigt først og fremmest funderet mit begreb om udvalgs-kategorier i *menneskers håndtering* af ting (genstande). Det er den menneskelige virksomhed, som består i at identificere, genkende og fastholde en ting over tid, som har været mit paradigmatisk udgangspunkt for definitionen af både sansen for det konkrete og for udvalgs-kategorierne.

Men Engelsted hævder, at den dobbelthed, der kommer til udtryk på den ene side i dyrs og menneskers søgen eller rettet-hed mod et objekt, på den anden side i deres sensoriske skel-

³ Boje Katzenelson ville udtrykke dette som, at sansen er en afgørende biopsykisk forudsætning for kulturpsyken (Katzenelson, 1989).

nen af objektets mønster af egenskaber, strukturelt set *også* kan beskrives af axiomatikken for udvalgs- og sansekategorier, henholdsvis. Dermed er der lagt op til en *generalisering* af den semantiske eller indholdsmæssige interpretation af begreberne sanse- og udvalgskategori, således at de omfatter *dyrs søgen og sporing* af objekter.⁴

Jeg synes, at det er et interessant forslag, bl.a. fordi jeg er enig med Engelsted i, at dyrene ikke kan reduceres til maskiner, der blot fungerer i forhold til et sensorisk input (Engelsted, 1997a). Det afgørende er, hvordan den nævnte generalisation skal se ud i detaljer, således at det *specifikt* menneskelige stadig kommer til sin ret. Formentlig kræver det en eksplicit inddragelse af *tid* i teorien, samt en udarbejdelse af menneskets sans for det konkrete til en sans for genstande som principielt sensorisk *uudtømmelige*. Begge dele har jeg diskuteret i Mammen (1983; 1994-1997) og fremhævet i Mammen (1998a, abstract p. 450).

Et særlig interessant træk ved Engelsteds forslag er nok, at det eksplicit knytter begrebet udvalgskategori til subjektets *intentionalitet*, dets konative og spontant aktive rettedhed og denne rettedheds "aboutness", i modsætning til individets funktionelle og reaktive livsopretholdelse (Engelsted, 1997b). Herved understreges det, at der i en generaliseret indholdsbestemmelse af udvalgskategoriernes også må udtrykkes en form for *spontaneitet* eller *frihed* i relation til de funktionelle lovmæssigheder baseret på sensorisk skelnen. I termen "udvalg" skal der så at sige ikke kun lægges vægt på det selektive "ud", men også på det spontane "valg" (se også Engelsted, 1994; Mammen, 1997, p. 117). Jeg vender tilbage til dette.

Det forhold, at udvalgskategoriernes udtrykker en form for uafhængighed af funktionelle lovmæssigheder baseret på sensoriske kriterier, udtrykker *Preben Bertelsen* i sin kommentar som, "at der ikke findes forhåndsgivende regler for udvalgs kategorisering og altså ingen på forhånd kendt algoritme for, hvordan en given udvalgs kategori *bliver til*. Udvalgs kategorier er resultatet af egentlig *skabende* akter. ... Udvalgs kategorisering er ... nonalgoritmisk." (Bertelsen, 1998, pp. 75-76).

Jeg kan godt følge Bertelsen i denne betragtning. Ved at bruge begrebet *nonalgoritmisk* knytter han imidlertid an til en matematisk tankegang, som har været inspirerende for teorien om sanse- og udvalgs kategorier, og som ligger bag valget af termen *udvalgs kategori*. For at forklare det nærmere for den undrende læser er det derfor nu nødvendigt med et par matematisk prægede afsnit, inden jeg også vender tilbage til Bertelsen.

4. Lidt matematikhistorie⁵.

⁴ Engelsted har uddybet argumentationen for sin generalisation i Engelsted (1998a). Desværre kan jeg af pladshensyn ikke referere den her.

⁵ De matematiske emner i dette og de næste to afsnit er som nævnt mere udførligt behandlet i Mammen (1994-1997) og for visse deles vedkommende i Engelsted (1998a).

Siden oldtiden har der været forskellige forståelser af, hvad matematik egentlig er. På den ene side kan det se ud til, at matematik blot er et menneskeskabt sprog, bestående af begreber, billeder eller former til beskrivelse af den empiriske virkelighed, gennem operationer som tælling og måling. En tom skal uden selvstændig substans. Et analytisk apparat, som dybest set er konstrueret af definitioner og deduktionsregler.

På den anden side kan det se ud til, at matematikken faktisk genererer, eller måske ligefrem opdager, en slags objekter, som er mere end de konstruktive og deduktive midler, der har defineret objekterne.

Et eksempel på det sidste er rækken af alle naturlige tal 0, 1, 2, 3, ..., som på grund af sin uendelighed synes at være mere end den endelige operation at lægge 1 til ethvert givet helt positivt tal, som definerer eller konstruerer rækken.

Et andet og mere vidtgående eksempel fandt allerede Pythagoras fra Samos (ca. 580-500 f.v.t.). På den ene side forstod han matematikken som en rationel konstruktion ud fra de hele tal. Således kunne han via regneoperationer definere og aflede, hvad der senere er kaldt de rationelle tal, nemlig alle brøker dannet ud fra de hele tal.

På den anden side forlangte Pythagoras, at tallene også skulle afbilde relationer i geometriske figurer. Her fik han imidlertid et problem. Han kunne nemlig bevise, at det tal, som udtrykker forholdet mellem længden af diagonalen og længden af siden i et kvadrat, ikke kan konstrueres som en brøk og faktisk slet ikke kan konstrueres ud fra de hele tal ved anvendelse af regneoperationerne. Alligevel må tallet eksistere, mente Pythagoras, som et *alagon*, dvs. som uudsigeligt (Dantzig, 1964, p. 107). I dag ville vi kalde dette tal (kvadratrodd 2) for et irrationelt tal.

Langt senere, i 1878, beviste den tyske matematiker Georg Cantor, at mængden af alle irrationelle tal er af endnu større uendelighed end den uendelige mængde af rationelle tal, som kan konstrueres ud fra de hele tal. Det samme gælder for mængden af de reelle tal, som omfatter alle rationelle og irrationelle tal.⁶

I 1930 beviste den østrigske matematiker og logiker Kurt Gödel, i princippet ved anvendelse af samme metode som Cantor, at matematikken i en fundamental forstand altid vil være rigere end sit definatoriske grundlag. Selv for den matematik, som alene handler om de hele tal, gælder det, at uanset hvor mange påstande vi har brugt til at definere eller beskrive tallene og deres egenskaber, vil der stadigvæk være sande påstande om tallene, som ikke med deduktive, eller algoritmiske, midler kan afledes af de allerede formulerede påstande. På den måde ligner matematikkens objekter altså virkelighedens empiriske objekter, der også har en uendelighed af (syntetiske) egenskaber, der ikke kan afledes af de (analytiske) egenskaber, der bruges til at udpege objekterne. En modsigelsesfri matematik for de hele tal kan ikke være *komplet*, som Gödel udtrykte det (Gödel, 1970a; 1970b).

⁶ Cantor viste, at mængden af hele tal og mængden af rationelle tal var af samme uendelige størrelsesorden ved at kunne parres indbyrdes. Mængden af reelle tal (og dermed også mængden af irrationelle tal) kunne derimod ikke parres med de hele tal. Der ville altid blive nogle reelle tal "til overs".

Nok så afgørende viste Gödel samtidig, at *konsistensen*, dvs. modsigelsesfriheden, af et system af matematiske påstande ikke kan bevises "*intern*", dvs. med deduktive midler inden for systemet selv. Konsistensen kan kun bevises ved, at systemet af matematiske påstande er en gyldig beskrivelse af et objekt (i matematisk sprogbrug en "model"), som antages at eksistere uden for systemet, altså "*ekstern*". *Afbildning og eksistens* er dermed mere fundamentale eller primitive begreber end konsistens. Matematikken var herefter ikke længere et lukket system, hvis eneste grundlag var dens egen autonome interne konsistens.

Gödels førstnævnte opdagelse betød, at den tusindårige drøm om at finde et endegyldigt grundlag for matematikken, hvorfra alle sande matematiske påstande kunne afledes algoritmisk eller "maskinelt", måtte opgives. Denne brudte forhåbning, svarende til en såkaldt *formalistisk* forståelse af matematik, henføres i nyere matematik ofte til den store tyske matematiker David Hilbert (1862-1943).

En opdagelse, der er stærkt beslægtet med Gödels, er Alan Turings bevis i 1936 for, at der ikke findes noget computerprogram, der med et vilkårligt andet program som input kan afgøre, om dette andet program vil stoppe på et tidspunkt eller vil køre i al evighed. Opdagelsen er kendt som "Turing's halting problem".

Jeg vil nu fremhæve endnu et tilsvarende matematisk sagsforhold, som Gödel henviste til i 1938 med et særligt formål, som jeg kommer tilbage til. Lad os se på en matematisk mangfoldighed som mængden af alle reelle tal⁷. Den svarer til mængden af alle uendelige decimalbrøker eller mængden af alle punkter på en uendelig ret linie. En *deltmængde* af denne mangfoldighed kan f.eks. være "alle reelle tal mellem 0 og 1, fraregnet 0 og 1 selv" eller "alle reelle tal mellem 7 og 8, medregnet 7 og 8 selv".

Lad os nu lave en regel, en såkaldt *funktionsforskrift*, der for enhver sådan delmængde udpeger netop ét element (tal eller punkt) i delmængden. Det kan f.eks. være funktionsforskriften "Tag det mindste tal i delmængden!". En sådan regel eller funktionsforskrift kaldes en *udvalgsfunktion*. Til delmængden "alle reelle tal mellem 7 og 8, inklusiv 7 og 8 selv" udpeger eller tilordner udvalgsfunktionen således elementet 7.

Men til delmængden "alle reelle tal mellem 0 og 1, fraregnet 0 og 1 selv" kan udvalgsfunktionen ikke udpege noget element, da der ikke findes et tal i delmængden, som er mindst. Tallet 0 er ikke jo selv med i delmængden, og for ethvert tal x i delmængden kan der findes et andet tal i delmængden, der er mindre, f.eks. $x/2$. I et sådant tilfælde må der altså anvendes en anden regel eller funktionsforskrift, f.eks. "Tag det midterste tal i delmængden", i dette tilfælde tallet $1/2$.

For andre delmængder vil imidlertid heller ikke denne regel kunne anvendes, men man må finde på andre regler. Man kunne tænke sig, at man kombinerede alle sådanne regler til en overordnet regel, der for enhver delmængde angav, hvorledes netop ét af delmængdens elementer skulle udpeges eller tilordnes. Imidlertid kan det, igen med anvendelse af Cantors metode, bevises, at sådan en *regelbaseret generel udvalgs-*

funktion findes ikke! Selv om reglen fyldte en hel bog, der beskrev, hvilken speciel regel man skulle følge i diverse tilfælde, ville man altid kunne definere endnu en delmængde, som reglen ikke kunne anvendes på. Der eksisterer med andre ord *ikke* nogen regel eller noget *kriterium*, som for enhver forelagt delmængde kan udpege netop ét af dens elementer. Der findes heller *ikke* noget generelt *ordningsprincip*, som for en given delmængde kan udpege netop ét af elementerne som det, der i henhold til denne orden er det første.

5. Det matematiske udvalgsaxiom.

På trods af de netop anførte sagsforhold hævder Gödel nu, at *der eksisterer en generel udvalgsfunktion*, der altså til enhver delmængde af de reelle tal, eller af tilsvarende uendelige mængder, udpeger eller tilordner netop ét af dens elementer. Funktionen er bare ikke baseret på nogen eksplicit regel, kriterium eller ordningsprincip.

Med andre ord er det muligt til enhver delmængde at tilordne ét af dens elementer, uden at man ved henvisning til en eksplicit regel har angivet, netop hvilket element der er tale om. Helt svarende til, at man ved en konkret forelagt mængde af materielle genstande altid vil kunne tage én af dem uden på forhånd at have defineret, hvorved den adskiller sig fra de andre. Man tager den bare!

Gödels påstand er faktisk identisk med en påstand, som den tyske matematiker og logiker Ernst Zermelo fremsatte allerede i 1908 (Moore, 1982, p. 5) som en reformulering af en berømt påstand, han havde fremsat i 1904, og som han kaldte for *udvalgsaxiomet* (Das Auswahlaxiom; The Axiom of Choice). Zermelo mente, som navnet også siger, at der var tale om et axiom, dvs. en påstand, som på den ene side var konsistent med alle matematikkens hidtil kendte påstande, men som på den anden side ikke kunne afledes af dem. Men han kunne ikke bevise, at nogen af delene var tilfældet.

Gödels genfremsættelse af Zermelos påstand indgik imidlertid i et model-bevis, som Gödel i 1938 gennemførte for, at udvalgsaxiomet faktisk var *konsistent* med matematikkens hidtidige påstande (Gödel, 1940; Moore, 1982, pp. 282, 334). Indtil da havde modstanderne af udvalgsaxiomet, og dem var der en del af, håbet på, at det kunne afvises som stridende mod disse påstande. Først i 1963 lykkedes det i øvrigt for den amerikanske matematiker Paul Cohen at bevise, at udvalgsaxiomet ikke kunne afledes af de samme påstande, dvs. at det ikke var et såkaldt *theorem* i den hidtidige matematik, men virkelig var en *uafhængig* påstand og altså fortjente betegnelsen *axiom* (Crossley et al., 1972, p. 73).

Udvalgsaxiomet er en radikal påstand, der på afgørende måde bryder med forestillingen om matematikken som ren konstruktion eller sprog, altså som en tautologi eller et ekko af sine begreber, og i stedet hævder, at den handler om former og mangfoldigheder, som ikke kan reduceres til deres definitiviske grundlag, men som alligevel i matematikkens forstand eksisterer. Det er da også betegnende, at modstanderne af aksiomet, som stadig findes som en minoritet, betegner sig selv

⁷ Vi kunne også som eksempel have valgt en vilkårlig anden mangfoldighed, der ligesom mængden af reelle tal er af større uendelighed end de hele tal eller de rationelle tal.

som *konstruktivister*, mens tilhængerne kalder sig *realister*. Det er slående, hvordan striden mellem disse to lejre ligner den, vi finder i de empiriske realvidenskaber (se Moore, 1982). At realisterne så for at markere, at matematikken ikke er empirisk, nogle gange kalder sig platonikere, er en anden sag.

Udvalgsaxiomet siger helt konkret, at der ganske vist findes delmængder i den matematiske "verden", der kan defineres ud fra regler eller kriterier, men at der også findes delmængder, der ikke kan defineres på denne måde. De kan imidlertid defineres gennem "*udvalg*", altså ved blot at blive "taget" eller udpeget.

Det er nærliggende at se disse indsigter fra matematikken som genspejlinger af vores forhold til den materielle verden. Her er det jo også karakteristisk for en realistisk forståelse, at man mener at kunne vælge noget ud i verden uden nødvendigvis at kende det på forhånd, endsiige kende dets forskel fra alt andet. En realistisk forståelse må netop gå ud fra, at udvælgelse og skelnen er to særskilte operationer. Ellers ville al erkendelse være tautolog eller analytisk. En syntetisk empirisk erkendelse må bygge på, at genstanden for erkendelsen kan udvælges uafhængigt af de skelnelige egenskaber, man dernæst konstaterer hos den.

6. Sanses- og udvalgskategoriernes matematik.

Det var noget i retning af ovenstående, som lå bag mit oprindelige valg af *betegnelserne* sanses- og udvalgs kategorier. Sanses kategorierne svarede til sådanne delmængder, som i matematikken kunne defineres ud fra regler og kriterier for medlemskab. Udvalgs kategorierne svarede til sådanne delmængder, som i matematikken var definerede ud fra et "udvalg".

Men jeg valgte i *Den menneskelige sans* (Mammen, 1983), hvor begreberne blev indført, at se bort fra disse matematiske inspirationer, når lige bortses fra termen udvalgs kategori, og i stedet argumentere forfra ud fra vores specifikt menneskelige praktisk-sanselige forhold til den materielle verden. Det jeg ville beskrive, var de principielle rammer for vores kategoriseringer af den tingslige verden, under forudsætning af, at vi på den ene side var ideelle mønstergenkendere, der sensorisk kunne skelne hvilke som helst genstande fra hinanden og samtidig på den anden side kunne identificere og kategorisere genstande, uden at det kunne reduceres til sensorisk skelnen. En slags *økologisk* beskrivelse af den *potentielle* kategorisering, som vores faktiske kategorisering skulle holdes op imod. Som allerede sagt svarende til Gibsons skelnen mellem potentiel og faktisk opsamlet information.

Dette førte til opstillingen af *elleve axiomer* for sanses- og udvalgs kategoriernes forhold til enkeltgenstande og for deres indbyrdes forhold, f.eks. en påstand om, at fællesmængden af en sanses kategori og en udvalgs kategori er en udvalgs kategori. Der er ikke plads til at gennemgå disse axiomer og deres

begrundelser her⁸. Jeg vil nøjes med at diskutere et problem, som jeg rejste i de første to udgaver af *Den menneskelige sans* (Mammen, 1983; 1989), og som er blevet løst i tredje udgave (Mammen, 1996, p. xxiii).

Spørgsmålet er, om sanses- og udvalgs kategorierne kan tænkes at rumme en potentielt set *komplet*, eller udtømmende, beskrivelse af strukturen i den tingslige verdens økologi. Sagt med andre ord: Kan det som et *ideelt tilfælde* tænkes, at enhver delmængde af genstande i den tingslige verden er en sanses kategori, en udvalgs kategori eller en foreningsmængde af en sanses- og en udvalgs kategori? Eller omvendt: Kan vi på forhånd ud fra de 11 axiomer slutte, at beskrivelsen ikke er komplet, og der derfor nødvendigvis må være delmængder i den tingslige verden, som ikke kan være sådanne kategorier?

Svaret er, at i den ovennævnte forstand er sanses- og udvalgs kategorierne faktisk et komplet kategorisystem. *Det nævnte ideelle, eller såkaldt maksimale, tilfælde eksisterer under forudsætning af udvalgs aksiomets gyldighed!* Det er blevet bevist i 1994 af den århusianske matematiker Jørgen Hoffmann-Jørgensen⁹. Efter alt at dømme er eksistensen af det maksimale tilfælde faktisk en ny udgave af udvalgs aksiomet, men dette er endnu ikke bevist¹⁰.

Det maksimale tilfælde er en matematisk mangfoldighed, et matematisk "objekt". Men hvis axiomerne for sanses- og udvalgs kategorierne beskriver vores forhold til den tingslige verden, er det maksimale tilfælde også udtryk for en potentiel struktur i dette forhold, eller i denne økologi. Det er et teoretisk grænsetilfælde, der er praktisk uopnåeligt for noget kategoriserende subjekt, men som afdækker den principielle rækkevidde af begreberne sanses- og udvalgs kategori.

Det er interessant, at *udvalgs aksiomet*, selv om det ikke har været en præmis i fremsættelsen af de 11 axiomer, nu dukker op som en mulig konsekvens af eksistensen af axiomerne, i matematisk sprogbrug, maksimale model. Mere interessant er det måske, at ved at forudsætte udvalgs aksiomet er det maksimale tilfælde i matematisk forstand *ikke konstruktivt*. Det vil sige, at det *ikke kan beskrives eksplicit*, selv om det nødvendigvis må eksistere. Det maksimale tilfælde eksisterer som et *alagon* i endnu mere radikal forstand end hos Pythagoras. Derved ligner det i øvrigt *selve den materielle tingslige verden*, som også eksisterer uden at være udtømmende beskrivbar.

⁸ Axiomerne er gengivet samlet i *Den menneskelige sans* (Mammen, 1983, pp. 356-357), hvor Ax. S 4 dog skal erstattes med Ax. S 7 (p. 408). Se også en samlet præsentation af axiomerne i Mammen (1994-1997; 1998a).

⁹ Se Mammen (1996, p. xxiii). Beviset (Hoffmann-Jørgensen, 1994) henviser til eksistensen af såkaldte maksimale perfekte topologier, som blev opdaget i 1943 af den amerikanske matematiker Edwin Hewitt, faktisk som svar på et spørgsmål helt ækvivalent til mit (Hewitt, 1943, p. 321; Mammen, 1983, p. 407). Udvalgs aksiomet optræder her i en lidt anden udgave end hos Zermelo og hos Gödel, nemlig som det såkaldte Zorn's Lemma. I det maksimale tilfælde er udvalgs kategorierne alle diskrete delmængder i en maksimal perfekt topologi, hvor sanses kategorierne er alle åbne delmængder.

¹⁰ Se Mammen (1996, p. xxiii). Matematikere ved Moskvas Universitet, som er eksperter på dette område, har uden held forsøgt at finde beviset.

I anden udgave af *Den menneskelige sans* havde jeg bevist, at hvis det maksimale tilfælde eksisterede, så ville endog *sansekategori*erne i dette tilfælde, selv om de definatorisk var baseret på sensoriske kriterier, være organiseret, så at de ikke kunne være baseret på nogen *algoritmisk*, computabel eller regelbaseret mønstergenken-der¹¹.

Men selv i økologisk realistiske ikke-maksimale tilfælde udtrykker axiomatikken, at *udvalgs-kategori*erne ikke kan reduceres til sansekategorier og altså heller ikke kan reduceres til klasser defineret ud fra en algoritmisk sensorisk mønstergenken-der.

Man kan *ikke* sige, at axiomatikken *beviser*, at udvalgs-kategori-erne er ikke-algoritmiske i den forstand, som dette begreb er brugt her. For aksiomerne er selv opstillede ud fra en antagelse om, at udvalgs-kategori-erne ikke er "algoritmisk reducerbare" til sansekategorier baseret på sensoriske kriterier. Man må nøjes med at sige, at aksiomerne og deres konsekvenser beviser, at forestillingen om en sådan ikke-reducerbarhed er *konsistent*¹², at den *korresponderer* med etablerede antagelser om kategorier, og at den ser ud til indirekte at rumme det bedste formelle billede, der kendes, på en *realistisk* forståelse af erkendelsen, nemlig det matematiske udvalgsaxiom, der netop hævder eksistensen af en *ikke-algoritmisk* funktion.

7. Tilbage til Bertelsen og Engelsted.

Jeg håber, at ovenstående viser, hvorfor jeg godt kan lide Bertelsens og Engelsteds generaliserede forståelser af udvalgs-kategori-erne som værende udtryk for det ikke-algoritmiske, ikke-mekaniske, ikke-funktionelle, dvs. det skabende, frie, spontane og intentionale i vores virksomhed. Men vel at mærke stadigvæk som en *genstandsrettet* virksomhed, altså en virksomhed, som udpeger, finder eller udvælger sig en (eller flere) genstand(e) i verden.

På sin vis svarer denne forståelse til opfattelsen af *kognition*er (Poulsen, 1991) som rettede virksomheder, der ikke mekanisk kan afledes af kognition og emotion/motivation (Bertelsen, Hem & Mammen, 1997, p. 7). I en vis forstand har vi aldrig tilstrækkelige kognitive og motivationelle præmisser for vores handlinger¹³. Sagt på mere almindeligt dansk svarer

¹¹ Matematisk er dette formuleret som, at sansekategori-erne ikke har nogen numerabel basis. I anden udgave af *Den menneskelige sans* bevises det, at hvis sansekategori-erne har en numerabel basis, så eksisterer det maksimale tilfælde ikke (Mammen, 1989, pp. xiv-xviii).
¹² Dette bevis er i Mammen (1983, pp. iii-xi) gennemført som et såkaldt matematisk model-bevis. En af indsigterne hos Gödel (1970b) er som sagt, at et bevis for konsistens ikke kan udføres alene med deduktive midler.

¹³ Jeg vil godt understrege, at der ikke heri ligger nogen stillingtagen til spørgsmålet om determinisme eller indeterminisme. Vores handlinger er blot frie i den forstand, at de ikke er reaktioner, som kan forstås inden for en snæver funktionalistisk ramme, dvs. som determineret af sansmæssige eller motivationelle "regler" eller kriterier. I den forstand kan trofasthed også være et udtryk for frihed (jfr. igen Mammen, 1997, p. 117).

det til, hvad vi alle kender fra dagligdagen, at det ikke er nok at være motiveret til at holde op med en uvane (f.eks. at ryge) og at vide, hvor skadelig den er. Man skal også beslutte sig, eller tage sig sammen. Det samme er velkendt fra psykoterapi og udnyttes f.eks. i kognitiv terapi og i eksistentiel terapi. Motivation og indsigt gør det ikke alene. Der er også brug for mod og beslutsomhed.¹⁴

Med reference tilbage til Schultz (1998a) vil jeg sige, at det er en "grundfortælling" i vores kultur, at mod og beslutsomhed er vigtigere end motivation og indsigt. Klodshans er ikke den eneste eventyrhelt, der tager afsted på må og få og dog får prinsessen og det halve kongerige¹⁵. I eventyret om de tre prinser fra Serendip får vi den samme morale¹⁶.

Faktisk er Niels Engelsteds lille flagellat, der svømmer derudad uden at vide hvorfor, og hvad det skal ende med, også en helt. Engelsted (1998a) beskriver derfor også på denne baggrund dens psyke som en episk eller narrativ struktur.

Jeg håber, at flagellaten kan komme med i *min* fortælling.

8. Kommentarer til Hansen, Neumann og Schultz.

Jan Tønnes Hansen påpeger (Hansen, 1998) for mig at se helt korrekt, at hvor jeg indfører en distinktion i subjektets virksomhed ved at beskrive en dobbeltstruktur i virksomhedens objektive side, så funderer Schultz sin distinktion mellem kategorisk og symbolsk erkendelse i en dobbeltstruktur i subjektets forholdemåde. Det er derfor nærliggende at krydse de to distinktioner og se, om der kan komme en brugbar taksonomi ud af det. Det samme gør Preben Bertelsen, men med et lidt andet resultat.

Der er mange spændende perspektiver i dette, som pladsen imidlertid ikke tillader, at jeg kommenterer i denne omgang. Jeg håber at kunne vende tilbage til det.

Til *Asger Neumanns* kommentar (Neumann, 1998) kan jeg næsten kun sige, at jeg ikke bare er enig, men at jeg synes, at kommentaren er både klagende og meget illustrativ. Jeg tror, at det er helt centralt for mennesker, både hvad angår erkendelse og moral, at vi gør os klart, at vi står over for en verden, som ikke kun er skabt af os eller er vores spejlbillede, men også er fremmed, uendelig og ukendt. Det afgørende, og formentlig bruddet med den græske eros-tankegang, er imidlertid, at det fremmede ikke opfattes som det uforståelige eller fjendtlige, men tværtimod som noget, vi kan møde og tilegne os. Men det må desværre også vente til en anden gang.

¹⁴ Det er tankevækkende, at man i matematisk beslutningsteori heller ikke kan redegøre for beslutninger alene som en mekanisk funktion af værdier og sandsynligheder, der tilskrives en række alternativer. Til sidst må der vælges blandt alternativerne i form af et "spring". Forholdet mellem vurderingerne og valget ligner faktisk forholdet mellem sanse- og udvalgs-kategorier (Hoffmann-Jørgensen, personlig kommunikation).

¹⁵ Tak til Ole Leimand for eksemplet!

¹⁶ Jfr. det engelske begreb serendipity, der ifølge The Concise Oxford Dictionary er "The faculty of making happy and unexpected discoveries by accident".

Lad dette, sammenholdt med mine bemærkninger ovenfor om kreative eventyrhelte, også gælde for en foreløbig kommentar til Erik Schultz' replik (Schultz, 1998b).

Referencer.

- Bertelsen, P. (1998). Vanskelighederne med udlægningen af teorien om sans- og udvalgs-kategorier. *Bulletin fra Forum for Antropologisk Psykologi*, Nr. 4, pp. 70-77.
- Bertelsen, P., Hem, L. & Mammen, J. (1997). Forord. I: P. Bertelsen, L. Hem & J. Mammen (red.). *Erkendelse, stræben, følelse. Ti bidrag til dansk almenpsykologi - i anledning af Henrik Poulsens 70-års dag den 27. sept. 1997*. Århus: Aarhus Universitetsforlag, s. 5-9.
- Crossley, J. N. et al. (1972). *What is mathematical logic?* London, Oxford, N.Y.: Oxford University Press.
- Dantzig, T. (1964). *Tallet, videnskabens sprog*. København: Gyldendal. (eng. udgave 1959).
- Engelsted, N. (1994). Floden og svømmeren. I: J. Mammen & M. Hedegaard (red.). *Virksomhedsteori i udvikling. Psykologisk Skriftserie, Psykologisk Institut, Aarhus Universitet, Vol. 19, No. 1*, pp. 23-42 (resumé p. vi).
- Engelsted, N. (1997a). Fortsatte betragtninger over Ψ . I: P. Bertelsen, L. Hem & J. Mammen (red.). *Erkendelse, stræben, følelse. Ti bidrag til dansk almenpsykologi - i anledning af Henrik Poulsens 70-års dag den 27. sept. 1997*. Århus: Aarhus Universitetsforlag, s. 73-102.
- Engelsted, N. (1997b). Det intentionelle versus det funktionelle. *Bulletin fra Forum for Antropologisk Psykologi*, Nr. 2, 47-55.
- Engelsted, N. (1998a). Efter studiebrevene. Selskabet for Teoretisk Psykologi (STP). Et elektronisk kollokvium ved Niels Engelsted og Jens Mammen. (Redigeret dokumentudgave ved Jens Mammen, 56 sider).
- Engelsted, N. (1998b). Almenpsykologi fra ringsiden. *Bulletin fra Forum for Antropologisk Psykologi*, Nr. 4, pp. 78-84.
- Gibson, J. J. (1966). *The senses considered as perceptual systems*. Boston: Houghton Mifflin.
- Gödel, K. (1940). *The consistency of the axiom of choice and of the generalized continuum-hypothesis with the axioms of set theory*. Princeton, N. J.: Princeton University Press.
- Gödel, K. (1970a). Some metamathematical results on completeness and consistency. In: J. van Heijenoort (ed.). *Frege and Gödel. Two fundamental texts in mathematical logic*. Cambridge, Mass.: Harvard University Press, pp. 86-87. (Original tysk udgave 1930. Oversat af van Heijenoort i samarbejde med Kurt Gödel).
- Gödel, K. (1970b). On formally undecidable propositions of Principia Mathematica and related systems I. In: J. van Heijenoort (ed.). *Frege and Gödel. Two fundamental texts in mathematical logic*. Cambridge, Mass.: Harvard University Press, pp. 87-107. (Original tysk udgave 1931. Oversat af van Heijenoort i samarbejde med Kurt Gödel).
- Hansen, J. T. (1998). Erkendelsesprocessers tilknytningsforhold og tidsforankring. *Bulletin fra Forum for Antropologisk Psykologi*, Nr. 4, pp. 85-92.
- Hewitt, E. (1943). A problem of set-theoretical topology. *Duke Mathematical Journal*, 10, 309-333.
- Hoffmann-Jørgensen, J. (1994). Maximal perfect topologies. *Notat, Matematisk Institut, Aarhus Universitet*, 19.9.94, 8 sider.
- Katzenelson, B. (1989). *Psykens verden, i verden. Et naturevangeli-um*. Århus: Aarhus Universitetsforlag.
- Køppe, S. (1998). Det psykiske. *Bulletin fra Forum for Antropologisk Psykologi*, Nr. 4, pp. 93-97.
- Mammen, J. (1983). *Den menneskelige sans. Et essay om psykologiens genstandsområde*. København: Dansk psykologisk Forlag.
- Mammen, J. (1989). *Den menneskelige sans. Et essay om psykologiens genstandsområde. 2. udgave*. København: Dansk psykologisk Forlag.
- Mammen, J. (1996). *Den menneskelige sans. Et essay om psykologiens genstandsområde. 3. udgave*. København: Dansk psykologisk Forlag.
- Mammen, J. (1994-1997). Det matematiske grundlag for teorien om sans- og udvalgs-kategorier. Selskabet for Teoretisk Psykologi (STP). Et elektronisk kollokvium ved Niels Engelsted og Jens Mammen. (Redigeret dokumentudgave ved Ole Elstrup Rasmussen & Jens Mammen, 233 sider).
- Mammen, J. (1997). Menneskebilleder i psykologien - og en diskussion med teologien. I: P. Bertelsen, L. Hem & J. Mammen (red.). *Erkendelse, stræben, følelse. Ti bidrag til dansk almenpsykologi - i anledning af Henrik Poulsens 70-års dag den 27. sept. 1997*. Århus: Aarhus Universitetsforlag, pp. 103-119.
- Mammen, J. (1998a). The psyche as 'res extensa'. Paper read at the Fourth Congress of the International Society for Cultural Research and Activity Theory (ISCRAT), Aarhus, 7.-11.6.98, 14 sider. Abstract i: M. Hedegaard & S. Chaiklin (eds.). *Fourth Congress of the International Society for Cultural Research and Activity Theory*. Århus: Psykologisk Institut, Aarhus Universitet, pp. 449-450.
- Mammen, J. (1998b). Udvalgs-kategorier og logik eller Oberst Danckwardts og harens sørgelige skæbner. *Bulletin fra Forum for Antropologisk Psykologi*, Nr. 4, pp. 44-62.
- Moore, G. H. (1982). *Zermelo's axiom of choice. Its origins, development, and influence*. New York: Springer.
- Neumann, A. (1998). AGF forever. *Bulletin fra Forum for Antropologisk Psykologi*, Nr. 4, pp. 98-102.
- Poulsen, H. (1991). *Conations. On striving, willing and wishing and their relationship with cognition, emotions, and motives*. Århus: Aarhus University Press.
- Schultz, E. (1998a). Udvalgs-kategorier og tilknytning. *Bulletin fra Forum for Antropologisk Psykologi*, Nr. 4, pp. 6-42.
- Schultz, E. (1998b). Replikker til kommentarerne. *Bulletin fra Forum for Antropologisk Psykologi*, Nr. 4, pp. 103-107.